1 - * لنبين أن $D_f =]-\infty , -1] \cup [1, +\infty[$

ليكن x عددا حقيقيا

لدينا : $|x| + 1 \neq 0$ و $x \in D_f \Leftrightarrow \frac{|x| - 1}{|x| + 1} \geq 0$

وبما أن $|x| + 1 > 0$

فإن : $x \in D_f \Leftrightarrow |x| - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow |x| \geq 1$

$\Leftrightarrow x \leq -1$ أو $x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

وبالتالي فإن : $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

*** دراسة زوجية f**

ليكن x عنصرا من D_f

لدينا : $(-x) \in D_f$ و $f(-x) = (-x)\sqrt{\frac{|-x| - 1}{|-x| + 1}}$

$$= -x\sqrt{\frac{|x| - 1}{|x| + 1}} = -f(x)$$

إذن : الدالة f فردية

2- * دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في 1

لكل x من $]1, +\infty[$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} - 0}{x - 1}$$

$$= \frac{x\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}}{x - 1}$$

وبما أن $x - 1 > 0$ و $x + 1 > 0$ لكل x من $]1, +\infty[$

فإن : $\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$

وبالتالي فإن : $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x\sqrt{x - 1}}{(x - 1)\sqrt{x + 1}}$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x\sqrt{x - 1}\sqrt{x - 1}}{(x - 1)\sqrt{x + 1}\sqrt{x - 1}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

*** التأويل الهندسي**

المنحنى (C_f) يقبل في النقطة $A(1, 0)$ نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى

3- * لنبين أن f تزايدية على المجال $]1, +\infty[$

• لكل x من $]1, +\infty[$ ، $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

• الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ ولدينا لكل x من $]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \cdot \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \cdot \frac{\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \cdot \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

وبما أن $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + \dfrac{x}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \geq 0$ لكل x من $]1, +\infty[$

فإن الدالة f بالفعل تزايدية على المجال $]1, +\infty[$

*** جدول تغيرات الدالة f على D_f**

بما أن f دالة فردية وتزايدية على المجال $]1, +\infty[$

فإنها ستكون تزايدية كذلك على المجال $]-\infty, -1]$

ومنه جدول تغيرات الدالة f على D_f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

ملاحظة : لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = 1$

وبالتالي فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

وبما أن f دالة فردية فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

4- أ- * لنبين أن : $f(x) - x = \dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{-2}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + 1}$ **لكل** $x > 1$

ليكن x عنصرا من المجال $]1, +\infty[$

لدينا :

$$f(x) - x = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x$$

$$= x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right) = x \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1}$$

$$= x \cdot \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} = x \cdot \frac{x-1-x-1}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}$$

$$= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1}$$

*** تحديد الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$**

لكل x من $]1, +\infty[$ ، $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

وبما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x}$

$= 1$

فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{1}$

$= 1$

ولدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} \cdot \frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1}$

$= 1 \cdot \frac{-2}{1+1} = -1$

إذن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته

$y = x - 1$

ب- إنشاء (C_f)