$$f(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

1) لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad ; \sqrt{x^2-4x+5} = |x| . \sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$

* $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}} = 2$$

إذن $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2}$

* $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

إذن $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2}$

2) a - *

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-4x+5} - (2x-2)\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}}{(\sqrt{x^2-4x+5})^2}$$

$$= \frac{2(x^2-4x+5)-(2x-2)(x-2)}{(\sqrt{x^2-4x+5})^2 . \sqrt{x^2-4x+5}}$$

$$= \frac{2x^2-8x+10-2x^2+2x+4x}{(\sqrt{x^2-4x+5})^3}$$

إذن $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad ; f'(x) = \frac{2(3-x)}{(\sqrt{x^2-4x+5})^3}}$

بما أن $(\sqrt{x^2 - 4x + 5})^3 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

فإن إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $3 - x$

b -

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-2 ↗	$2\sqrt{2}$	↘ 2

3) a - لنقارن $f(x)$ و 2.

*
$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = 2$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = x^2 - 4x + 5$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 4x + 5$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

* لدينا الدالة f تزايدية قطعا على $]-\infty, 3]$

إذن : ـ إذا كان $x < 2$ فإن $f(x) < f(2)$ أي $f(x) < 2$

ـ إذا كان $2 < x < 3$ فإن $2 < f(x)$

* لدينا الدالة f تناقصية قطعا على $[3, +\infty[$

و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

إذن $f(x) > 2$ لكل x من $[3, +\infty[$.

الخلاصة :

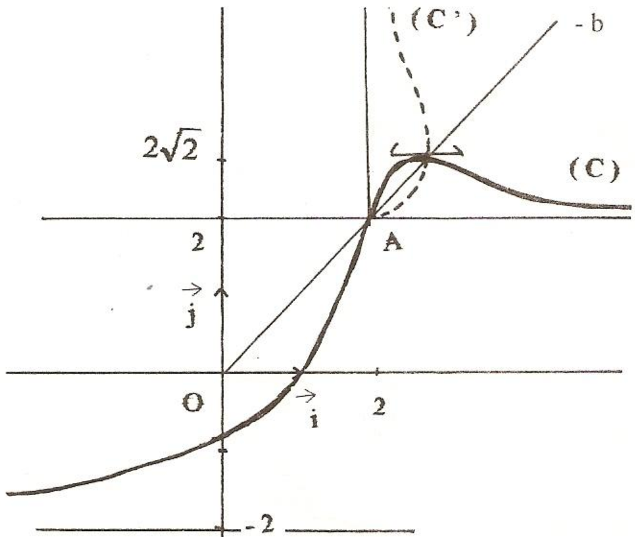
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 2 \\ f(x) < 2 \Leftrightarrow x < 2 \\ f(x) > 2 \Leftrightarrow x > 2 \end{array}}$$

إذن :

ـ المنحنى (C) يوجد فوق المستقيم ذي المعادلة $y = 2$ إذا كان $x > 2$.

ـ المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم ذي المعادلة $y = 2$ إذا كان $x < 2$.

ـ المنحنى (C) يقطع المستقيم ذي المعادلة $y = 2$ في النقطة $A(2, 2)$.



$I = [\,3, +\infty\,[$ (4

a - من خلال دراسة الدالة f، g دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال I و $g(I) =]\,2,\ 2\sqrt{2}\,]$.

إذن g تقابل من I نحو $]\,2,\ 2\sqrt{2}\,]$.

b - (C ') منحنى g^{-1} مرسوم بخط متقطع.