1- أ- لنبين بالترجع أن : $U_n > \frac{3}{2}$ لكل n من IN

• لدينا : $U_0 = 3$

إذن : $U_0 > \frac{3}{2}$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

• ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن : $U_n > \frac{3}{2}$ ولنبين أن : $U_{n+1} > \frac{3}{2}$

لدينا : $U_{n+1} - \frac{3}{2} = 3 - \frac{9}{4U_n} - \frac{3}{2}$

$$= \frac{3}{2} - \frac{9}{4U_n} = \frac{6U-9}{4U_n} = \frac{6\left(U_n - \frac{3}{2}\right)}{4U_n}$$

وبما أن : $U_n > \frac{3}{2}$

فإن : $U_n - \frac{3}{2} > 0$ و $U_n > 0$

وبالتالي فإن : $\frac{6\left(U_n - \frac{3}{2}\right)}{4U_n} > 0$ أي : $U_{n+1} - \frac{3}{2} > 0$

أي : $U_{n+1} > \frac{3}{2}$

خلاصة : لكل n من IN ، $U_n > \frac{3}{2}$

ب- * لنبين أن (U_n) تناقصية

ليكن n عنصرا من IN

لدينا : $U_{n+1} - U_n = 3 - \frac{9}{4U_n} - U_n$

$$= \frac{12U_n - 9 - 4U_n^2}{4U_n} = -\frac{4U_n^2 - 12U_n + 9}{4U_n}$$

$$= -\frac{(2U_n - 3)^2}{4U_n}$$

وبما أن : $(2U_n - 3)^2 \geq 0$ و $U_n > 0$

فإن : $-\frac{(2U_n - 3)^2}{4U_n} \leq 0$

أي : $U_{n+1} - U_n \leq 0$

وهذا يعني أن المتتالية (U_n) تناقصية

• **الاستنتاج**

المتتالية تناقصية و مصغورة بالعدد $\frac{3}{2}$ (لأن $U_n > \frac{3}{2}$ لكل n من IN)

إذن فهي متقاربة

ج- تحديد ℓ نهاية المتتالية (U_n)

بما أن : $U_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4U_n}$ لكل n من IN

فإن : $\ell = 3 - \dfrac{9}{4\ell}$

أي : $4\ell^2 = 12\ell - 9$ أي : $4\ell^2 - 12\ell + 9 = 0$

أي : $(2\ell - 3)^2 = 0$

أي : $2\ell - 3 = 0$

أي : $\ell = \dfrac{3}{2}$

2- أ- لنبين أن (V_n) متتالية حسابية

ليكن n عنصرامن IN

لدينا : $V_{n+1} - V_n = \dfrac{2}{2U_{n+1} - 3} - \dfrac{2}{2U_n - 3}$

$$= \frac{2}{2\left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} - \frac{2}{2U_n - 3} = \frac{2}{6 - \frac{9}{2U_n} - 3} - \frac{2}{2U_n - 3}$$

$$= \frac{2}{3 - \frac{9}{2U_n}} - \frac{2}{2U_n - 3} = \frac{4U_n}{6U_n - 9} - \frac{2}{2U_n - 3}$$

$$= \frac{4U_n - 6}{6U_n - 9} = \frac{2(2U_n - 3)}{3(2U_n - 3)} = \frac{2}{3}$$

إذن (V_n) بالفعل متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{2}{3}$

ب- * كتابة V_n بدلالة n

بما أن (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{2}{3}$ وحدها الأول

$$V_0 = \frac{2}{2.U_0 - 3} = \frac{2}{6-3} = \frac{2}{3}$$

فإنه لكل n من IN ، $V_n = V_0 + nr$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n = \frac{2n+2}{3}$$

* الاستنتاج

ليكن n عنصرا من IN

لدينا : $V_n = \dfrac{2}{2U_n - 3}$

إذن : $V_n(2U_n - 3) = 2$

أي : $2U_nV_n = 3V_n + 2$

ومنه فإن : $U_n = \dfrac{3V_n + 2}{2V_n}$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{V_n} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2n+2}$$

$$= \frac{3(n+1) + 3}{2n+2} = \frac{3(n+1+1)}{2(n+1)} = \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

إذن : $U_n = \frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ لكل n من IN