$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 + \frac{1}{2^n}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$V_n = u_{n+1}^3 - u_n^3 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

1) أ -

$$V_n = u_{n+1}^3 - u_n^3$$
$$= \left(\sqrt[3]{u_n^3 + \frac{1}{2^n}} \right)^3 - u_n^3$$
$$= u_n^3 + \frac{1}{2^n} - u_n^3$$

إذن

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_n = \frac{1}{2^n}}$$

ب - $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$

S_n هي مجموعة الحدود الأولى (وعددها n) للمتتالية الهندسية التي حدها الأول 1 وأساسها $\frac{1}{2}$.

إذن

$$S_n = \frac{1.\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

أي

$$\boxed{S_n = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$$

2) أ -

$$\begin{aligned} + \quad & V_0 = u_1^3 - u_0^3 \\ + \quad & V_1 = u_2^3 - u_1^3 \\ & \vdots \\ + \quad & V_{n-1} = u_n^3 - u_{n-1}^3 \\ \hline & V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1} = u_n^3 - u_0^3 \end{aligned}$$

إذن $\forall n \in \quad ; \quad S_n = u_n^3 - 1$

ب - * $S_n = u_n^3 - 1 \Rightarrow u_n^3 = 1 + S_n$

$$\Rightarrow u_n = \sqrt[3]{1 + S_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \sqrt[3]{1 + 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = \sqrt[3]{3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

* $-1 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

$$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt[3]{3}$$