

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n + 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n + 1 \end{cases} \quad \text{و } b_0 = 1 \text{ و } a_0 = 3$$

(1) لتكن المتتالية العددية المعرفة بـ $u_n = a_n - b_n$: $(\forall n \in \mathbb{N})$;

أ - بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

ب - اكتب u_n بدلالة n ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

(2) لتكن المتتالية العددية المعرفة بـ $v_n = \frac{a_n + b_n}{n}$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$;

أ - بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; v_n \geq 2$

ب - بين أن $v_{n+1} = \frac{2 - v_n}{n+1} + v_n$ ، $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ ، ثم استنتج رتبة المتتالية (v_n) .

ج - بين أن المتتالية (v_n) متقاربة وأن نهايتها l موجبة قطعاً.

(3) احسب كلامن a_n و b_n بدلالة u_n و v_n ، ثم احسب نهايتي (a_n) و (b_n) .