$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{7\,u_n}{1+2\,u_n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) أ - * لدينا $u_0 = 2$ إذن $0 < u_0 < 3$

* نفترض أن $0 < u_p < 3$ لنبين أن $0 < u_{p+1} < 3$

• $1 + 2\,u_p > 0$ و $u_p > 0 \Rightarrow 7\,u_p > 0$

$$\Rightarrow \frac{7\,u_p}{1+2\,u_p} > 0$$

$$\Rightarrow u_{p+1} > 0$$

•

$$3 - u_{p+1} = 3 - \frac{7\,u_p}{1+2\,u_p}$$

$$= \frac{3 - u_p}{1+2\,u_p}$$

$1 + 2\,u_p > 0$ و $0 < u_p < 3 \Rightarrow 3 - u_p > 0$

$$\Rightarrow \frac{3 - u_p}{1+2\,u_p} > 0$$

$$\Rightarrow u_{p+1} < 3$$

إذن $0 < u_{p+1} < 3$

الخلاصة : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; 0 < u_n < 3}$

ب - لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7\,u_n}{1+2\,u_n} - u_n$$

$$= \frac{2\,u_n\,(3 - u_n)}{1+2\,u_n}$$

$1 + 2\,u_n > 0$ و $3 - u_n > 0$ و $0 < u_n < 3 \Rightarrow 2\,u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{2\,u_n\,(3 - u_n)}{1+2\,u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_n < u_{n+1}}$

ومنه المتتالية (u_n) تزايدية قطعا.

(2

$$V_n = \frac{u_n}{3 - u_n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

أ -

$$V_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3 - u_{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{7u_n}{1 + 2u_n}}{3 - \frac{7u_n}{1+2u_n}}$$

$$= \frac{7u_n}{3 - u_n}$$

$$= 7 V_n$$

إذن

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_{n+1} = 7 V_n}$$

ومنه فإن المتتالية (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 7$ وحدها الأول

$$V_0 = \frac{u_0}{3 - u_0} = 3$$

وبالتالي فإن

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_n = 3 . 7^n}$$

ب - *

$$V_n = \frac{u_n}{3 - u_n} \Rightarrow 3 V_n = u_n V_n + u_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3 V_n}{V_n + 1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{9 . 7^n}{3 . 7^n + 1}}$$

*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{7^n (9)}{7^n \left[3 + \left(\frac{1}{7}\right)^n \right]}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{9}{3 + \left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

$$= 3$$

(لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$)

إذن

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 3}$$