$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + 2^n u_n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) لدينا $u_1 = \dfrac{u_0}{2 + 2^0 u_0}$

إذن $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{3}}$

2) أ ـ • لدينا $u_0 = 1$ إذن $u_0 > 0$

• نفترض أن $u_p > 0$

$$u_p > 0 \Rightarrow 2 + 2^p u_p > 0 \quad و \quad u_p > 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_p}{2 + 2^p u_p} > 0$$

$$\Rightarrow u_{p+1} > 0$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n > 0}$

ب ـ لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2 + 2^n u_n} - u_n$$

$$= u_n \left(\frac{1}{2 + 2^n u_n} - 1 \right)$$

$$u_n > 0 \quad \Rightarrow 2 + 2^n u_n > 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2 + 2^n u_n} < 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2 + 2^n u_n} - 1 < 0$$
$$\Rightarrow u_n \left(\frac{1}{2 + 2^n u_n} - 1 \right) < 0$$
$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

إذن المتتالية (u_n) تناقصية.

ج - بما أن المتتالية (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة.

3) $V_n = \dfrac{1}{2^n u_n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$

أ -

$$V_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1} u_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{2^{n+1} . \dfrac{u_n}{2 + 2^n u_n}}$$
$$= \frac{2 + 2^n u_n}{2^{n+1} u_n}$$
$$= \frac{2}{2^{n+1} u_n} + \frac{2^n u_n}{2^{n+1} u_n}$$
$$= \frac{1}{2^n u_n} + \frac{1}{2}$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_{n+1} = V_n + \frac{1}{2}}$

ومنه فإن (V_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب - • لدينا (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = 1$.

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad V_n = 1 + \frac{n}{2} = \frac{2+n}{2}}$

$$V_n = \frac{1}{2^n u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{2^n . V_n}$$ *

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{2^n . \left(\frac{2+n}{2}\right)}$$

إذن $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; u_n = \frac{1}{(n+2)\, 2^{n-1}}}$$

ج -

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (n+2) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (n+2)\, 2^{n-1} = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$$