1) أ- لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $\sin(4x) = \sin 2(2x)$

$$= 2\sin 2x.\cos 2x$$

إذن : $A(x) = \sin 4x - 2\sin^2 2x$

$$= 2\sin 2x.\cos 2x - 2\sin^2 2x$$
$$= 2\sin 2x(\cos 2x - 2\sin 2x)$$

ب- لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

إذن : $A(x) = 2\sin 2x(\cos 2x - \sin 2x)$

$$= 2\sqrt{2}.\sin 2x.\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}.\sin 2x.\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ أو } \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \text{ أو } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \text{ أو } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $A(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ هي :

$$S = \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3) أ- إذا كان $\frac{\pi}{2} \prec x \prec \frac{5\pi}{8}$

فإن $\pi \prec 2x \prec \frac{5\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4} \prec 2x + \frac{\pi}{4} \prec \frac{3\pi}{2}$

ومنه $\sin 2x \prec 0$ و $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \prec 0$

وبالتالي فإن : $\sin 2x.\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \succ 0$

أي أن : $A(x) \succ 0$ لكل x من المجال $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right[$.

ب- لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $\cos 4x = \cos 2(2x)$

$$= 1 - 2\sin^2 2x$$

إذن : $\cos 4x + \sin 4x - 1 = 1 - 2\sin^2 2x + \sin 4x - 1$

$$= \sin 4x - 2\sin^2 2x$$

$= A(x)$

ج- بما أن $A(x) \succ 0$ لكل $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right[$

و $\frac{\pi}{2} \prec \frac{7}{4} \prec \frac{5\pi}{8}$

فإن : $A\left(\frac{7}{4}\right) \succ 0$

إذن $\cos 4\left(\frac{7}{4}\right) + \sin 4\left(\frac{7}{4}\right) - 1 \succ 0$ أي $\cos 7 + \sin 7 \succ 1$