1- لنبين أن f متصلة في 1.

بما أن : $f(1)=\frac{1+1}{2\sqrt{1}}$

$=\frac{2}{2}=1$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1+x}{2\sqrt{x}}$

$=\frac{1+1}{2\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1=f(1)$

فإن الدالة f متصلة على اليمين في I .

ولدينا : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x+\frac{2}{x}\right)$

$=-1+\frac{2}{1}=-1+2=1=f(1)$

إذن الدالة f متصلة على اليسار في 1

وبالتالي فإن الدالة f متصلة بالفعل في النقطة $x_0=1$ لأنها متصلة على اليمين وعلى اليسار في هذه النقطة

2-أ- لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

لدينا : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x+\frac{2}{x}-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x^2+2-x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(-x-2)}{x(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x-2}{x}=\frac{-1-2}{1}=-3$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق بالفعل على اليسار في 1

و : $f_g'(1)=-3$

ب- لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

لدينا: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1+x}{2\sqrt{x}}-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1-1}{2(1+1)}=\frac{0}{4}=0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق بالفعل على اليمين في 1

و : $f_{d'}(1)=0$

3-أ- لنبين أن $f'(x)\prec 0$ لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[\cup]0,1[$ ولدينا x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

$f'(x)=\left(-x+\frac{2}{x}\right)$

$=-1-\frac{2}{x^2}-\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$

وبما أن : $1+\frac{2}{x^2} \succ 0$ لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

فإن : $f'(x) \prec 0$ لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

أ- لنبين أن : $f'(x)=\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$ لكل x من $]1,+\infty[$

f دالة قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ ولدينا لكل x من $]1,+\infty[$

$$f'(x)=\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)}{x}\right]=\frac{1}{2}.\frac{2x-1-x}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$$

إذن $f'(x)\succ 0$ لكل x من $]1,+\infty[$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f ' (x)		−	‖	− (- 3)	‖ (0)	+	
f(x)	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

لدينا :

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

$$* \lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=-\infty$$

$$* \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

$$* \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$$

4-أ- دراسة الفروع اللانهائية:

*بما أن : $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

فإن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل مقاربا رأسيا معادلته x =0 أي محور الأراتيب.

* لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$ ، $f(x)=-x+\frac{2}{x}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x}=0$

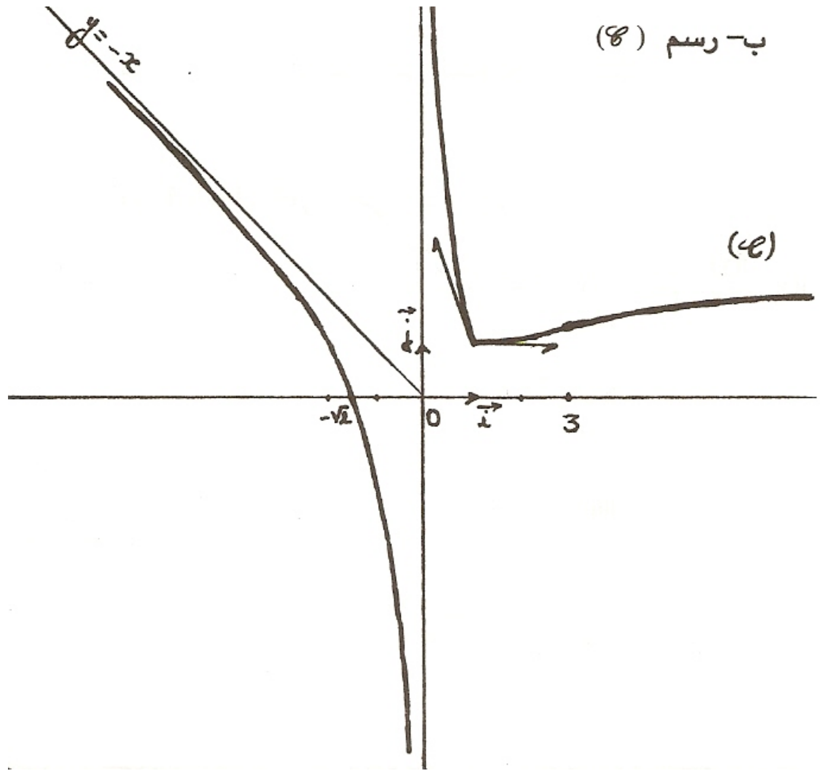
إذن (ζ) مقاربا معادلته y = -x يقبل بجوار $-\infty$

* لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{2x\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=0+0=0$

إذن (ζ) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

ب- رسم $(\mathscr{C})$



ملحوظة : معادلتا حاملي نصفي مماس (ζ) عند النقطة ذات الأفصول 1 هما : $y=1$ و $y=-3x+4$