1) لدينا $u_1 = 2\sqrt{2}$

2) أ- لدينا $0 \prec u_1 \prec 2\sqrt{3}$

وإذا كان $0 \prec u_n \prec 2\sqrt{3}$

فإن $0 \prec \frac{u_n^2}{3} \prec 4$

أي أن : $0 \prec 8 \prec 8 + \frac{u_n^2}{3} \prec 12$

ومنه $0 \prec u_{n+1} \prec 2\sqrt{3}$

إذن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $0 \prec u_n \prec 2\sqrt{3}$

وبما أن $u_n = 0$ فإن $0 \le u_n \prec 2\sqrt{3}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n}\sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{u_n^2} + \frac{1}{3}}$$

بما أن $0 \prec u_n \prec 2\sqrt{3}$ فإن $0 \le u_n^2 \prec 12$

يعني أن : $\frac{8}{u_n^2} \succ \frac{8}{12}$ أي أن $\frac{8}{u_n^2} \succ \frac{2}{3}$

ومنه $\frac{8}{u_n^2} + \frac{1}{3} \succ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

يعني أن $\frac{8}{u_n^2} + \frac{1}{3} \succ 1$

إذن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \succ 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

يعني أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_{n+1} \succ u_n \succ u_0 = 0$

وبالتالي فإن : (u_n) تزايدية قطعا .

ج- (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد $2\sqrt{3}$ إذن متقاربة.

3) أ- لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$v_{n+1} = 12 - u_{n+1}^2$$

$$= 12 - (8 + \frac{u_n^2}{3})$$

$$= 4 - \frac{u_n^2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(12 - u_n^2)$$

Achamel.net

إذن : $= \frac{1}{3} v_n$

وبالتالي فإن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 12$

ب- لدينا $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = v_0 (\frac{1}{3})^n$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \frac{12}{3^n}$

ونستنتج أن $u_n^2 = 12 - v_n$

$= 12 - \frac{12}{3^n}$

يعني أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 2\sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{1}{3^n}}$

ج- لدينا $\lim \frac{1}{3^n} = 0$ لأن $\lim 3^n = +\infty$

ومنه $\lim u_n = 2\sqrt{3}$

Achamel.net