تصحيح الإمتحان المقترح رقم 5

حل الأسئلة

1- أ- لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

لدينا : $\Delta = 12 - 16 = -4$

و منه $Z_1 = \frac{2\sqrt{3} + i\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3} + i$

$Z_2 = \overline{Z_1} = \sqrt{3} - i$

إذن : $S = \{\sqrt{3} - i ; \sqrt{3} + i\}$

ب- لنكتب على الشكل المثلثي حلي المعادلة (E) :

لدينا $Z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$

و $Z_2 = \overline{Z_1} = \left[2, -\frac{\pi}{6}\right]$

2- لنبين أن : $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{12} = 1$

تذكير : صيغة موافر $\forall n \in Z \ ; \ [r,\alpha]^n = [r^n, n\alpha]$

لدينا $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left[1, \frac{\pi}{6}\right]$

و منه $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = \left[1, \frac{\pi}{6}\right]^{12} = \left[1^{12}, 12 \times \frac{\pi}{6}\right]$
$= [1, 2\pi] = 1$

3- نضع $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ نجد $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$

إذن $\int_1^e x^2 \ln(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{9}x^3\right]_1^e = \left[\frac{1}{3}x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)\right]_1^e$

و منه $\int_1^e x^2 \ln(x)dx = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$

التمرين رقم 1 :

1- لدينا $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$

و منه $\Omega(1,0,1)$ هو مركز الفلكة (S) و $r = \sqrt{2}$ شعاعها

لدينا $d(\Omega,(P)) = \frac{|1+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r$

و منه (P) مماس للفلكة (S) .

2- لتكن T نقطة تماس (P) و الفلكة (S)، T هي تقاطع (P) و المستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على (P) ،

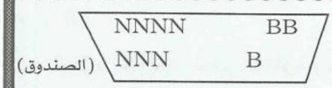
لدينا تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad (t \in IR)$$

إذن لتحديد مثلوث إحداثيات T نقطة تماس (P) و (S) نحل النظمة : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1 \\ x+y-3 = 0 \end{cases}$ نجد $1+t+t-3 = 0$
$t = 1$

و منه $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ إذن $T(2,1,1)$

التمرين رقم 2 :



1- ليكن Ω كون الإمكانيات

لدينا : $Card\Omega = C_{10}^2 = 45$

* احتمال الحدث A ،

يتحقق الحدث A بالحصول على كرتين لونهما أسود

لدينا $CardA = C_7^2 = 21$

و بما أن الاحتمال منتظم فإن $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

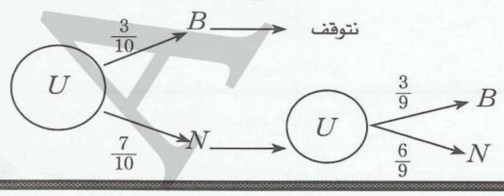
* احتمال الحدث B

يتحقق الحدث B بالحصول على كرة واحدة بالضبط لونها أبيض أو الحصول على كرتين لونهما أبيض

إذن $CardB = C_3^1.C_7^1 + C_3^2 = 24$

و منه فإن $p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

2- لنترجم هذه التجربة في الشكل التالي :



* احتمال الحدث C : يتحقق الحدث C بالحصول على كرة بيضاء في السحبة الأولى

يعني: $U \xrightarrow{\frac{3}{10}} B$ (من الشكل أعلاه)

ومنه $p(C)=\frac{3}{10}$

* احتمال الحدث D : يتحقق الحدث D بالحصول على كرة بيضاء في السحبة الأولى أو بالحصول على كرة بيضاء في السحبة الثانية :

يعني $U \xrightarrow{\frac{3}{10}} B$ أو $U \xrightarrow{\frac{7}{10}} N \xrightarrow{\frac{3}{9}} B$

ومنه

$$p(D)=\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}$$

$$p(D)=\frac{3}{10}+\frac{7}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

حل المسألة :

الجزء الأول :

1- لدينا : $g(x)=x-1-\ln x,\ \forall x\in]0,+\infty[$

و $h(x)=x+(x-2)\ln x$

أ- لدينا : $\forall x>0\ ;\ g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(x-1)$ يعني :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

ب- لدينا من خلال جدول تغيرات الدالة g ، 0 قيمة دنيا للدالة g عند 1

ومنه $\forall x>0\ ;\ g(x)\geq 0$

2- أ- لدينا

$$1+g(x)+(x-1)\ln x=1+x-1-\ln x+(x-1)\ln x$$
$$=x+(-1+x-1)\ln x=x+(x-2)\ln x$$
$$=h(x)\quad ;\quad (\forall x>0)$$

ب- لدينا

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln(x)$	‖	$+$	0	$+$	

ومنه $\forall x>0\ ;\ (x-1)\ln x\geq 0$

3- نعلم أن $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$

و $g(x)\geq 0$ و $(x-1)\ln x\geq 0$

إذن $\forall x>0\ ;\ h(x)\geq 1>0$

الجزء الثاني :

لدينا : $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$

1- أ- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{0^+} 1+x\ln x-(\ln x)^2=-\infty$

(لأن $\lim\limits_{0^+} x\ln(x)=0$ و $\lim\limits_{0^+}(\ln(x))^2=+\infty$)

إذن المستقيم $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

ب- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{+\infty} 1+x\ln(x)-(\ln(x))^2$

$$=\lim_{+\infty} 1+x\ln(x)\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$$

(لأن $\lim\limits_{+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ و $\lim\limits_{+\infty} x\ln(x)=+\infty$)

ثم لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\frac{1}{x}+\ln(x)\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$$

ومنه نستنتج أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

2- أ-(لكل $x>0$) لدينا f مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ هما $x\mapsto -(\ln(x))^2$ و $x\mapsto 1+x\ln(x)$

إذن

$$f'(x)=(x\ln(x))'-\left[(\ln(x))^2\right]=\ln(x)+1-2.\frac{1}{x}\ln(x)$$
$$=\frac{x+(x-2)\ln(x)}{x}=\frac{h(x)}{x}$$

ب- بما أن $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{h(x)}{x}$

و $(\forall x>0)\ ;\ h(x)>0$

حسب السؤل 3 من الجزء الأول فإن: $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)>0$

يعني أن f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

3- أ- (Δ) المستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1,1)$

إذن معادلة (Δ) هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

يعني أن $y=1(x-1)+1$ إذن $(\Delta): y=x$

ب- لدينا :

$$(\forall x>0); f(x)-x=1+x\ln(x)-(\ln(x))^2$$

ثم لدينا

$$(\ln(x)-1)g(x) = (\ln(x)-1)(x-1-\ln(x))$$
$$= x\ln(x) - \ln(x) - (\ln(x))^2 - x + 1 + \ln(x)$$
$$= 1 + x\ln(x) - (\ln(x))^2 - x$$

إذن $(\forall x>0)\ ;\ f(x)-x = (\ln(x)-1)g(x)$

ج- نعلم حسب السؤال 1) ب الجزء الأول أن $\forall x>0\ ;\ g(x)\ge 0$

و لدينا $\ln(x)-1=0 \longleftrightarrow x=e$

إذن : إذا كان $0<x\le e$ فإن $f(x)-x\le 0$

و إذا كان $x\ge e$ فإن $f(x)-x\ge 0$

استنتاج :

* في المجال $]0,e[$; $f(x)\le x$

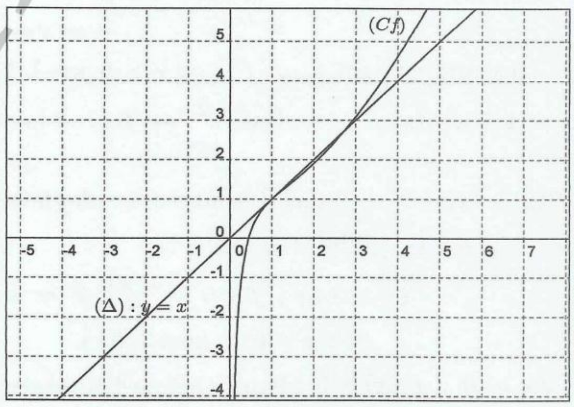
و منه (C) يوجد تحت (Δ)

* في المجال $[e,+\infty[$; $f(x)\ge x$

و منه (C) المجال يوجد فوق (Δ)

ملحوظة : (C) و (Δ) يتقاطعان في نقطتين $A(1,1)$ و $B(e,e)$

4- إنشاء المنحنى (C) و المستقيم (Δ) :



الجزء الثالث :

لدينا : $(\forall n\in IN); u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=\sqrt{e}$

1- لنبين بالترجع أن $(\forall n\ge 0)\ ;\ 1<u_n<e$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\sqrt e$ بما أن $1<\sqrt e<e$

فإن $1<u_0<e$

نفترض أن $1<u_k<e$ من أجل k معلوم

و نعلم أن f تزايدية على المجال $]0,+\infty[$

إذن $f(1)<f(u_k)<f(e)$ يعني أن $1<u_{k+1}<e$

و منه نستنتج أن $(\forall n\in IN)\ ;\ 1<u_n<e$

2- نعلم أن $\forall x\in]1,e]\ ;\ f(x)\le x$

(حسب السؤال 3) ج- الجزء الثاني)

و $(\forall n\in IN)\ ;\ u_n\in]1;e[$ (مما سبق)

إذن $(\forall n\in IN)\ ;\ f(u_n)\le u_n$

يعني أن $(\forall n\in IN)\ ;\ u_{n+1}\le u_n$

و بالتالي $(u_n)_n$ تناقصية .

3- بما أن $(u_n)_n$ تناقصية و مصغورة بالعدد 1 فإن $(u_n)_n$ متقاربة

* حساب نهاية $(u_n)_n$:

لدينا $(\forall n\in IN)\ ;\ u_{n+1}=f(u_n)$

و $(\forall n\in IN)\ ;\ u_n\in]1;e[$

و $f(]1;e[)=]1;e[$

و $(u_n)_n$ متقاربة

إذن نهاية $(u_n)_n$ هي a بحيث $f(a)=a$ و $a\in[1,e]$

$(\ln(a)-1)g(a)=0 \leftrightarrow f(a)-a=0 \leftrightarrow f(a)=a$

$\leftrightarrow g(a)=0$ أو $\ln(a)-1=0$

$\leftrightarrow$ $a=1$ أو $a=e$

و لدينا $1\in[1,e]$ و $e\in[1,e]$

و بما أن $(u_n)_n$ تناقصية فإن $(\forall n\ge 0);1<u_n<\sqrt e$

و منه $1\le \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le \sqrt e$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$