تمرين 12

1) أبين أن: $\dfrac{ab}{a+b} \leqslant \dfrac{a+b}{4}$

$$\frac{a+b}{4} - \frac{ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4(a+b)}$$
$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4(a+b)}$$
$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4(a+b)}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{4} - \frac{ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}}$$

بما أن a و b موجبان قطعا. فإن $4(a+b)$ عدد موجب.
و: $(a-b)^2$ عدد موجب (مربع عدد) إذن: $\dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)}$ عدد موجب

ومنه فإن $\boxed{\dfrac{ab}{a+b} \leqslant \dfrac{a+b}{4}}$

2) استنتاج: بما أن a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا

فإن: $\dfrac{ab}{a+b} \leqslant \dfrac{a+b}{4}$

وبالمثل لدينا: $\dfrac{ac}{a+c} \leqslant \dfrac{a+c}{4}$ و: $\dfrac{bc}{b+c} \leqslant \dfrac{b+c}{4}$

وبجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف أحصل على:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \leqslant \frac{a+b}{4} + \frac{a+c}{4} + \frac{b+c}{4}$$
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \leqslant \frac{a+b+a+c+b+c}{4}$$

يعني: $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{ac}{a+c} + \dfrac{bc}{b+c} \leqslant \dfrac{2a+2b+2c}{4}$

يعني: $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{ac}{a+c} + \dfrac{bc}{b+c} \leqslant \dfrac{2(a+b+c)}{4}$

إذن: $\boxed{\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{ac}{a+c} + \dfrac{bc}{b+c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{2}}$