1 – تحديد D

الدالة $x \to x|x-1|$ معرفة على $\mathbb{R}$ إذن فهي معرفة بالخصوص على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

الدالة $x \to \frac{x-1}{x+1}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$

إذن فهي معرفة بالخصوص على $]-1,1[$

وبالتالي $D=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\cup]-1,1[$

$=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

2 – نهايات f عند محدات D

لدينا $\lim_{x\to+\infty}|x-1|=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}|x-1|=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- لدينا $\lim_{x\to-\infty}|x-1|=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

- لدينا $\lim_{x\to1^-}(x-1)=0$ و $\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$

إذن $\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{0}{2}=0$

ملاحظة : لدينا $f(1)=1|1-1|=1.0=0$

إذن $\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)$

وهذا يعني أن الدالة f متصلة على اليسار في 1

وبما أن الدالة الدالة f متصلة على اليمين في 1 (تحقق من ذلك)

فإن الدالة f متصلة في النقطة 1 .

* لدينا $\lim_{x\to(-1)^+}(x-1)=-2$ و $\lim_{x\to(-1)^+}(x+1)=0^+$

إذن $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$

المستقيم ذو المعادلة x = -1 هو مقارب رأسي للمنحنى C_f

ملاحظة : الدالة f غير متصلة على اليمين في 1- في حين أنها متصلة على اليسار في 1- (تحقق من ذلك)

3 – دراسة قابلية اشتقاق f على D

إذا كان $x\in[1,+\infty[$ فإن $f(x)=x(x-1)=x^2-x$

وإذا كان $x\in]-\infty,-1]$ فإن $f(x)=x(1-x)=x-x^2$

وإذا كان $x\in]-1,1[$ فإن $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

*الدالة $x\to x^2-x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (دالة حدودية) إذن فهي قابلة للاشتقاق بالخصوص على $]1,+\infty[$

*الدالة $x \to x - x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (دالة حدودية) إذن فهي قابلة للاشتقاق بالخصوص على $]-\infty,-1[$

* الدالة $x \to \frac{x-1}{x+1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ (دالة جذرية)

إذن فهي قابلة للاشتقاق بالخصوص على $]-1{,}1[$

مما سبق نستخلص أن الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالات $]-\infty,-1[$ و $]-1,1[$ و $]1,+\infty[$

بقي أن ندرس قابلة اشتقاق f في كل من النقطتين 1و -1

لدينا : $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x(x-1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1^+} x = 1$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و $f_d(1)=1$

لدينا : $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{\frac{x-1}{x+1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1 و $f'_g(1)=\frac{1}{2}$

وبما أن $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ فإن الدالة f غير قابلة الاشتقاق في 1

لدينا $f(-1) = -1|-1-1| = (-1).2 = -2$

و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{(x+1)(-x+2)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{x-x^2+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)-f(1)}{x+1}$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في -1 و $f'_g(-1)=3$

رأينا أن الدالة f غير متصلة على اليمين في -1

إذن فهي غير قابلة للاشتقاق على اليمين في -1

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في -1

4 – تغيرات f

إذا كان $x \in]1,+\infty[$ فإن : $f'(x) = 2x-1 \succ 0$

وإذا كان $x \in]-\infty,-1[$ فإن : $f'(x) = 1-2x \succ 0$

وإذا كان $x \in]-1{,}1[$ فإن : $f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \succ 0$

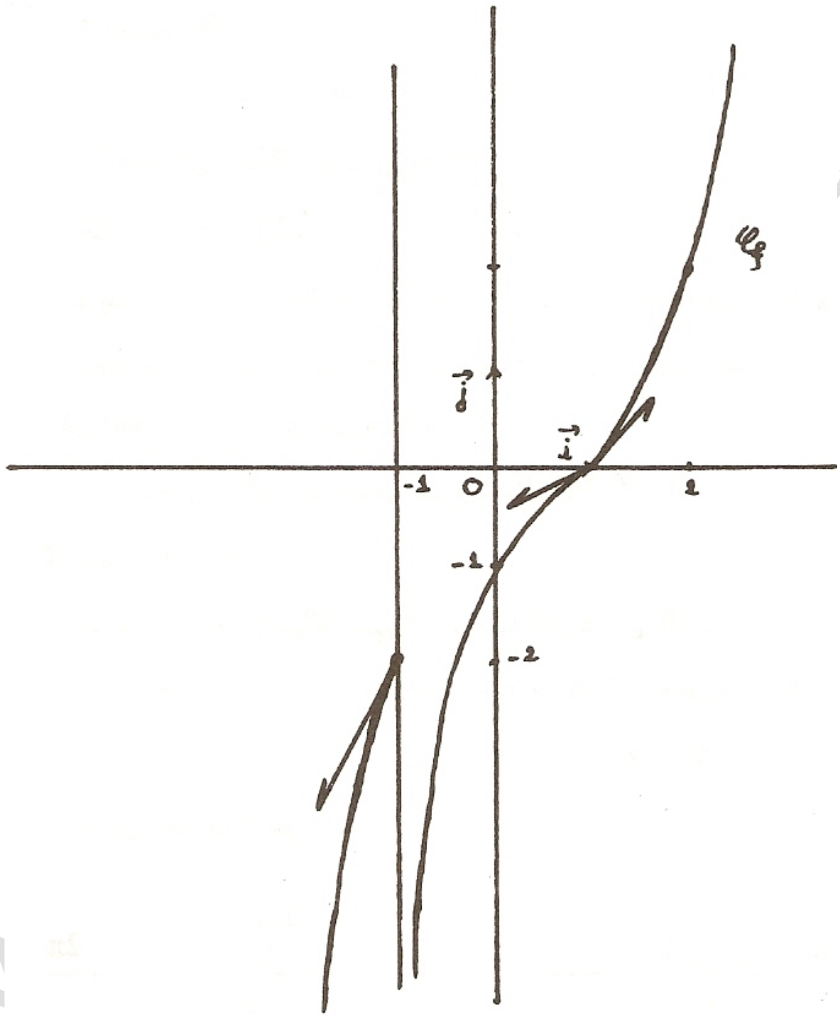
ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	3 ‖	+	1/2 ‖ 1	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-2 ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

5 - إنشاء ζ_f

ملاحظة : المنحنى ζ_f يقبل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ فرعين شلجميين اتجاههما محور الأراتيب لأن :

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x|x-1|}{x} = \lim_{|x|\to+\infty} |x-1| = +\infty$$



6 - عدد حلول المعادلة $(E): f(x) = m$

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد نقط تقاطع المنحنى ζ_f مع المستقيم الأفقي Δ ذي المعادلة y = m

ومنه الحالات الاتية :

إذا كان $m \le -2$ فإن ζ_f و Δ يتقاطعان في نقطتين وهذا يعني أنه إذا كان $m \in]-\infty, -2]$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين إثنين .

إذا كان $m \succ -2$ فإن ζ_f و Δ يتقاطعان في نقطة واحدة وهذا يعني إذا كان $m \in]-2, +\infty[$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا

ويمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول التالي :

m	$-\infty$		-2		$+\infty$
عدد حلول (E)		حلان	حلان	حل واحد	