إمتحان مقترح رقم 5

أسئلة :

1- أ- حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

ب- أكتب على الشكل المثلثي حلي المعادلة (E) .

2- بين أن $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{12} = 1$

3- باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن $\int_1^0 x^2 \ln x dx = \frac{2e^3+1}{9}$

التمرين رقم 1 :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر الفلكة (S) التي معادلتها $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$ و المستوى (P) الذي معادلته $x+y-3=0$

1- بين أن المستوى (P) مماس الفلكة (S) .

2- حدد مثلوث إحداثيات نقطة تماس (P) و (S) .

التمرين رقم 2 :

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء و سبع كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس

1- نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق ، و ليكن A و B الحدثين التاليين :

* A : « الكرتان المسحوبتان لونهما أسود »
* B : « من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل كرة لونها أبيض »

أ- بين أن احتمال الحدث A يساوي $\frac{7}{15}$ و أن احتمال الحدث B يساوي $\frac{8}{15}$

2- نعتبر التجربة العشوائية التالية : نسحب كرة واحدة من الصندوق، فإذا كانت بيضاء نتوقف عن السحب و إذا كانت سوداء نضعها جانبا ثم نسحب كرة ثانية و أخيرة من الصندوق .

ليكن C و D الحدثين التاليين :

* C : « الحصول على كرة بيضاء في السحبة الأولى»
* D : « الحصول على كرة بيضاء »

أ- أحسب احتمال الحدث C

ب- بين أن احتمال الحدث D يساوي $\frac{8}{15}$

مسألة

الجزء الأول : نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x-2)\ln x$

1- أ- أحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ثم ادرس منحى تغيرات الدالة g

ب- استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

2- أ- بين أن $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

ب- بين أن $(x-1)\ln x \geq 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

3- استنتج أن $h(x) > 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 - أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ثم أول هذه النتيجة مبيانيا .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ (لاحظ $f(x) = 1 + x\ln x.\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$)

2 - أ-بين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

ب- استنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $]0,+\infty[$

3 -ليكن (Δ) المستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1,1)$

أ- بين أن معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) هي $y=x$

ب- تحقق من أن $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

ج- ادرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ)

4 -أنشئ المنحنى (C) و المستقيم (Δ) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف أفصولها محصور بين 1 و $1,5$)

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \sqrt{e}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1- بين بالترجع أن $1 < u_n < e$ لكل n من $\mathbb{N}$

2- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية، يمكن استعمال نتيجة السؤال الثالث «ج» من الجزء الثاني .

3- استنتج أن (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها .