$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 9} \;;\; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) • لدينا $u_0 = 2$ إذن $u_0 > \sqrt{3}$

• نفترض أن $u_n > \sqrt{3}$ $(n \in \mathbb{N})$

• لنبين أن $u_{n+1} > \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} u_n > \sqrt{3} &\Rightarrow u_n^2 + 9 > 12 \\ &\Rightarrow \sqrt{u_n^2+9} > 2\sqrt{3} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+9} > \sqrt{3} \\ &\Rightarrow u_{n+1} > \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;;\; u_n > \sqrt{3}}$$

(2

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+9} - u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n^2+9} - 2u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{u_n^2 + 9 - 4u_n^2}{\sqrt{u_n^2+9} + 2u_n} \\ &= \frac{3}{2}\,\frac{3 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2+9} + 2u_n} \end{aligned}$$

بما أن $u_n > \sqrt{3}$ فإن $3 < u_n^2$ و $0 < 2u_n$ ($u_n^2 > 3$ و $2u_n > 0$)

ومنه فإن $\frac{3}{2}\,\frac{3 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2+9} + 2u_n} < 0$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n}$

إذن (u_n) متتالية تناقصية قطعا.

3) بما أن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد $\sqrt{3}$ فإنها متقاربة.

$$v_n = u_n^2 - 3 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

a -

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}^2 - 3 \\ &= \frac{1}{4}(u_n^2 + 9) - 3 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(u_n^2 + 9 - 12)$$

$$= \frac{1}{4}(u_n^2 - 3)$$

$$= \frac{1}{4} v_n$$

إذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n}$

ومنه فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

b - لدينا $v_0 = u_0^2 - 3 = 1$

إذن $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه فإن $u_n^2 = 3 + v_n$

وبالتالي فإن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \sqrt{3 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}}$

c - بما أن $-1 < \frac{1}{4} < 1$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

ومنه فإن $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}}$