1) لاحظ أن $D_f = \mathbb{R}$ و $f(1) = (1-1)e^1 = 0$ •

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (\sqrt{\ln x}) = 0 = f(1)$

إذن f متصلة على اليمين في النقطة 1.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x-1)e^x = 0 = f(1)$

إذن f متصلة على اليسار في النقطة 1.

وبالتالي f متصلة في النقطة 1.

2) • $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x-1}$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\ln x}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$$

$$= +\infty$$

لأن $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$ و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{\ln x}} = +\infty$.

وبالتالي f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة 1.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{(x - 1) e^x}{x - 1}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} e^x = e$$

إذن f قابلة للإشتقاق على اليسار في النقطة 1.

نستنتج أن f غير قابلة للإشتقاق عند النقطة 1.

3) a - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\ln x} = +\infty$

- بما أن $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x e^x - e^x) = 0$

b) ـ لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

إذن $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= 0 . 0 = 0$$

ومنه المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل جوار∞ +

ـ بما أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ فإن المستقيم ذي المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) جوار $-\infty$

4) ـ لكل x من $] -\infty, 1 [$:

$$f'(x) = e^x + (x - 1) e^x$$
$$= x e^x$$

إذا كان $x < 0$ فإن $f'(x) < 0$ وإذا كان $0 < x < 1$ فإن $f'(x) > 0$

وإذا كان $x = 0$ فإن $f'(x) = 0$

ـ لكل x من $] 1, +\infty [$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

لاحظ أن $f'(x) > 0$ لكل x من $] 1, +\infty [$

ـ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$e \parallel +\infty$	$+$	
$f(x)$	0 ↘		-1	↗	0	↗	$+\infty$

5) a) لكل x من $]-\infty, 1[$:

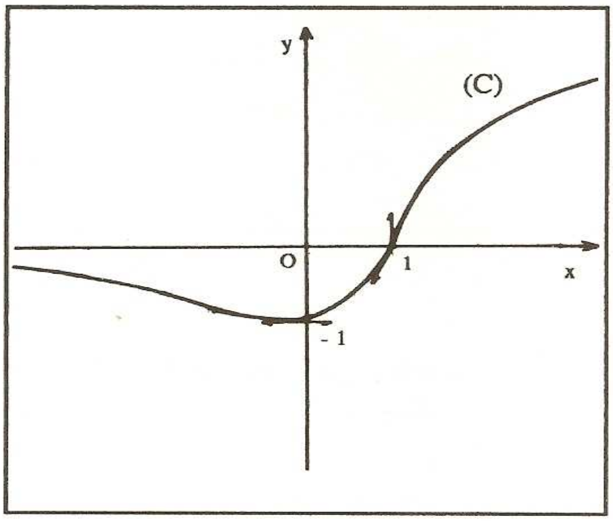
$$f''(x) = e^x + x\,e^x$$
$$= (x+1)\,e^x$$

بما أن $f''(x)$ تنعدم مع تغيير الإشارة عند 1 - فإن النقطة $I(-1, f(-1))$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C)

لدينا : $f(-1) = \frac{-2}{e}$

إذن : $I\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$

b)



6) $V = \int_1^e \pi f^2(x)\,dx$

$= \pi \int_1^e \ln x\,dx$

نضع $u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1$ $\quad v = x$

إذن $V = \pi\left([x \ln x]_1^e - \int_1^e dx\right)$

$= \pi\,(e - [x]_1^e)$

$= \pi$

إذن $V = \pi$