1) ـ لاحظ أن $D_f = \mathbb{R}^*$

ـ النهايات عند محدات D_f :

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$
$= 1 \times 0 = 0$

إذن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

• $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x = +\infty$

إذن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$

• $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x = -\infty$

إذن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x = +\infty$

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- حساب $f'(x)$:

لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}e^x + \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$$

$$= \frac{x^2 - x + 1}{x^2} e^x$$

إذن $\quad (\forall x \in \mathbb{R}^*) : \quad f'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} e^x$

بما أن $\frac{e^x}{x^2} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 - x + 1$.

مميز ثلاثية الحدود $x^2 - x + 1$ سالب (لأن $\Delta = -3$) إذن $x^2 - x + 1 > 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ وبالتالي $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \; ; \; f'(x) > 0$

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\vert\vert$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	$\vert\vert$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) أ - لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{e^x}{x} = +\infty$

وبالتالي المنحنى $\mathscr{C}$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$

▪ بما أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ فإن المستقيم ذي المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى $\mathscr{C}$

▪ بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ فإن المستقيم ذي المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى $\mathscr{C}$ جوار $-\infty$.

ب- لدينا : $f(1) = 0$ و $f'(1) = e$

إذن معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $\mathscr{C}$ عند النقطة التي أفصولها 1 هي : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

أي : $y = ex - e$

ج- لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f''(x) = \left(\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right)e^x + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)e^x$$

$$= \left(\frac{-2}{x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)e^x$$

$$= \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^3}e^x$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}e^x$$

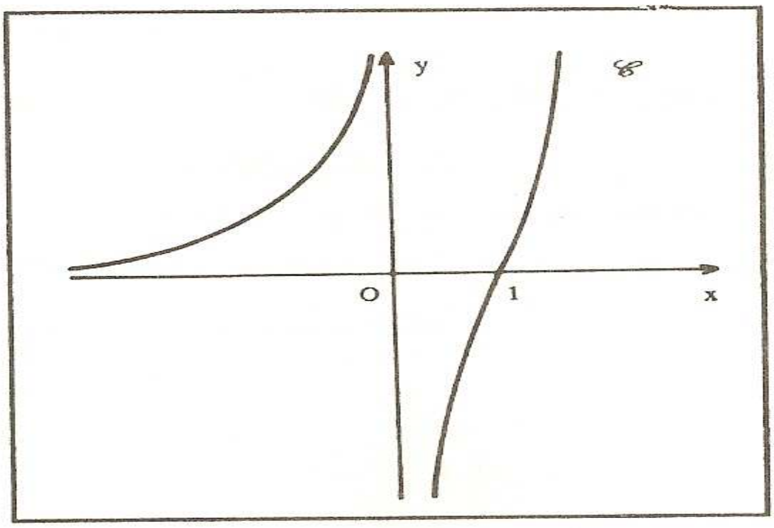
إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \;:\; f''(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}e^x$

بما أن $\dfrac{x^2+2}{x^2}e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ فإن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $\dfrac{x-1}{x}$

ومنه : الجدول التالي يعطينا تقعر المنحنى $\mathscr{C}$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	‖ −	0	+
تقعر المنحنى $\mathscr{C}$	$\cup$	‖ $\cap$	I (1, 0) نقطة إنعطاف	$\cup$

د -



3) أ- لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2} e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)e^{2x}$$
$$= \left(\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{2}{x}\right)e^{2x}$$
$$= \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x\right)^2$$
$$= (f(x))^2$$

وبالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : F'(x) = (f(x))^2$

ب- نحسب $\int_1^2 (f(x))^2 \, dx$

$$\int_1^2 (f(x))^2 \, dx = \int_1^2 F'(x) \, dx$$
$$= [F(x)]_1^2$$
$$= F(2) - F(1)$$
$$= \frac{e^2}{2}$$

وبالتالي : $V = \int_1^2 \pi f^2(x) \, dx = \frac{\pi e^2}{2}$

مع تحيات Equipe Achamel