I) 1) $x \in D_u$ يعني $|x| > 0$ أي $x \neq 0$

إذن $D_u =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

2) * نعلم أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-x \ln(-x)) = 0$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} u(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{3}{2}x - x \ln x\right) = 0$

و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} u(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\frac{3}{2}x - x \ln(-x)\right) = 0$

* لدينا : $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} \ln(-x) = +\infty$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{3}{2} - \text{Ln}\, x\right) = -\infty$

و $\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{3}{2} - \text{Ln}(-x)\right) = +\infty$

* لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$u'(x) = \frac{1}{2} - \text{Ln}\,|x|$

* $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{e}$ أو $x = \sqrt{e}$

* $u'(x) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{e} < x < \sqrt{e}$

* $u'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$ أو $x < -\sqrt{e}$

* جدول تغيرات u :

x	$-\infty$		$-\sqrt{e}$		0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\sqrt{e}$	$\nearrow$	0 ‖ 0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	$-\infty$

II) 1) من خلال السؤال I) 2) رأينا أن : $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$

إذن : $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{u(x)} = 1 = f(0)$

وهذا يعني أن f دالة متصلة في النقطة $x_0 = 0$

2) ليكن $x \neq 0$ لدينا :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{u(x)} - 1}{x} = \left(\frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)}\right)\left(\frac{u(x)}{x}\right)$$
$$= \left(\frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)}\right)\left(\frac{3}{2} - \text{Ln}\,|x|\right)$$

إذا وضعنا : $t = u(x)$ فإن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

كما أن : $\lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{2} - \text{Ln}\,|x|\right) = +\infty$

إذن : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$

وبالتالي f غير قابلة للإشتقاق في النقطة $x_0 = 0$.

هندسيا هذه النتيجة تعني أن المنحنى (C_f) للدالة f يقبل مماسا موازيا لمحور الأراتيب في النقطة $A(0, 1)$

3) أ- من خلال السؤال I) 2) رأينا أن :

$\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{u(x)}$
$= 0$

و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{u(x)}$
$= +\infty$

ب- ليكن $x \neq 0$:

$$f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \operatorname{Ln}|x|\right) e^{\left(\frac{3}{2}x - x\ln|x|\right)}$$

ج- لكل $x \neq 0$: $f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$

إذن $f'(x)$ و $u'(x)$ لهما نفس الإشارة على المجموعة $\mathbb{R}^*$.

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{e}$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$ $+\infty$	‖	$+\infty$ $+$ 0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$e^{-\sqrt{e}}$ ↗	1 ↗	$e^{\sqrt{e}}$ ↘	0

4) أ- ليكن $x < 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{u(x)}}{x} = \frac{e^{u(x)}}{u(x)} \cdot \frac{u(x)}{x}$$
$$= \frac{e^{u(x)}}{u(x)} \cdot \left(\frac{3}{2} - \operatorname{Ln}|x|\right)$$

عندما يؤول x الى $-\infty$ فإن $u(x)$ يؤول الى $+\infty$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{u(x)}}{u(x)} = +\infty$

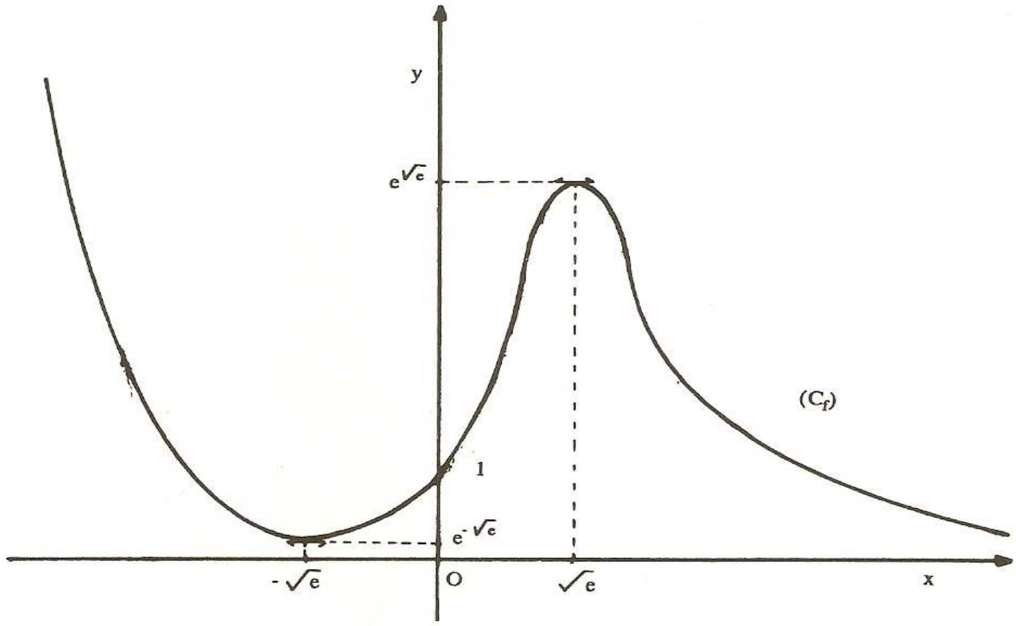
كما أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{2} - \operatorname{Ln}|x|\right) = -\infty$

إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

ب- * $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ يعني أن المستقيم ذي المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

يعني أن المنحنى (C_f) يقبل إتجاها مقاربا هو اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.


y
$e^{\sqrt{e}}$
(C_f)
1
$e^{-\sqrt{e}}$
$-\sqrt{e}$
O
$\sqrt{e}$
x