1) حساب الجداء المتجهي :

لدينا : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$

إذن $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -\vec{i} + \vec{k}$

2) معادلة لـ (OAB)

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متجهة منظمية على المستوى (OAB). ومنه :

$-x + z + \alpha = 0$ حيث $\alpha \in IR$ معادلة لـ (OAB).

وبما أن O تنتمي الى (OAB) فإن : $\alpha = 0$.

إذن : $-x + z = 0$ أي $x - z = 0$ معادلة ديكارتية لـ (OAB)

3) معادلة الفلكة (S) :

بما أن (OAB) مماس للفلكة (S) فإن شعاع (S) هو :

$$d(\Omega,(OAB)) = \frac{|-3-1|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}$$

إذن : معادلة (S) هي :

$$(x-(-3))^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

أي : $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2z + 2 = 0$

4) إحداثيات نقطة التماس :

نقطة التماس هي نقطة تقاطع المستوى $(\mathscr{P})$ مع المستقيم العمودي على $(\mathscr{P})$ والمار من Ω. (لان $(\mathscr{P})$ مماس الفلكة (S))

وبما أن هذا المستقيم موجه بالمتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ فإن تمثيلا بارامتريا له هو :

$$\begin{cases} x = -3-\lambda \\ y = 0 \\ z = 1+\lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in IR)$$

إذن : مثلوث احداثيات نقطة التماس هو حل النظمة :

$$\begin{cases} x = -3-\lambda \\ y = 0 \\ z = 1+\lambda \\ x-z = 0 \end{cases} \qquad \text{أي :} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

وبالتالي : مثلوث احداثيات نقطة التماس هو : $(-1,0,-1)$.

5) إثبات النتيجة :

لدينا : $H(-1,0,1)$ تنتمي الى (S).

بما أن $\overrightarrow{\Omega H}(2,0,-2)$ فإن : $\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u} = 10\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k}$

ولدينا :

$$d(\Omega, D(H,\vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{100+64+100}}{\sqrt{4+25+4}}$$

أي :

$$d(\Omega, D(H,\vec{u})) = \frac{\sqrt{264}}{\sqrt{33}} = 2\sqrt{2}$$

إذن : $D(H,\vec{u})$ مماس للفلكة (S)